Преобразование силы в СТО

Вопрос релятивистского преобразования силы при переходе к другой ИСО не всегда хорошо понимается. Эйнштейн в известной статье тоже сперва ошибся, получив формулу для «поперечной массы»: $\dfrac{m}{1-v^2/c^2}$ вместо правильной $\dfrac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Поэтому есть смысл рассмотреть дело подробнее.

Легче это осуществить с использованием 4-мерного формализма – компоненты любого 4-вектора $A^i(A^0, A^1, A^2, A^3)$ преобразуются по Лоренцу:

$$A'^1 = \frac{A^1 - \frac{V}{c}A^0}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ A'^2 = A^2,\ A'^3 = A^3,\ A'^0 = \frac{A^0 - \frac{V}{c}A^1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Напомню, что 4-вектор силы выражается покомпонентно следующим образом:

$$f^i = \left(\frac{dE}{dt}\frac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{f_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{f_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{f_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right),$$ где:

E – полная энергия;

v – скорость движения тела, на которое действует сила;

f_x, f_y, f_z – компоненты обычного 3-мерного вектора силы $\mathbf{f}$.

Поскольку dE это работа силы, ее можно записать через скалярное произведение векторов: $\mathbf{f}d\mathbf{r} = \mathbf{fv}dt$, и тогда:

$$f^i = \left(\frac{\mathbf{fv}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{f_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{f_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{f_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \qquad (1)$$

Рассмотрим два полезных случая.

Тело, движущееся поперек

Пусть тело движется в направлении оси *y* со скоростью v, сила действует также в направлении *y*: $f_x = 0, f_z = 0$.

Для данного случая 4-сила:

$$f^i = \left(\frac{vf_y}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, 0, \frac{f_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, 0\right)$$

Перейдем в другую ИСО, движущуюся относительно первоначальной со скоростью *V* (оси *x* совпадают). Найдем новые компоненты 4-силы, а затем и силы.

Компонента 4-вектора, соответствующая оси *y*, при преобразовании по Лоренцу не изменяется ($A'^2 = A^2$), поэтому:

$$f'^2 = f^2.$$

Выразим это через обычную силу из (1):

$$\frac{f_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{f'_y}{c\sqrt{1-v'^2/c^2}}. \qquad (2)$$

v' это скорость тела в новой ИСО. Она пока неизвестна, но ее легко получить по составляющим.

$v'_y = v_y\sqrt{1-V^2/c^2} = v\sqrt{1-V^2/c^2}$ – по формуле преобразования скорости;

$v'_x = V$ – очевидно.

Теперь по теореме Пифагора: $v'^2 = v^2 + V^2 - \dfrac{v^2V^2}{c^2}$

Нетрудно преобразовать (проверьте!):

$\sqrt{1-v'^2/c^2} = \sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-V^2/c^2}$

Итак, из (2) получаем:

$$\frac{f_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{f'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

$$\boxed{f'_y = f_y\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Величина поперечной силы уменьшается.

Компонента 4-силы, соответствующая оси x, равнялась нулю, но при преобразовании по Лоренцу она станет ненулевой. Действительно:

$$f'^1 = -f^0\frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = -f_y\frac{vV}{c^3\sqrt{1-V^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (3)$$

Мы уже знаем, что в знаменателе (3) два радикала можно заменить на $\sqrt{1-v'^2/c^2}$. Заменяем также в левой части:

$f'^1 = \dfrac{f'_x}{c\sqrt{1-v'^2/c^2}}$ – из (1).

В результате получаем:

$$\frac{f'_x}{c\sqrt{1-v'^2/c^2}} = -f_y\frac{vV}{c^3\sqrt{1-v'^2/c^2}},$$

$$\boxed{f'_x = -f_y\frac{vV}{c^2}}.$$

Итак, сила f_y, направленная в первоначальной ИСО вдоль оси y, при переходе к другой ИСО изменяется как по величине, так и по направлению. Появляется продольная сила, пропорциональная скорости поперечного движения!

Как же так: продольная сила есть, но тело в продольном направлении движется вроде бы с постоянной скоростью? Но не забываем, что в ИСО не соблюдается закон Ньютона в его «школьной» форме: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Векторы ускорения и силы в общем случае не совпадают по направлению! Свидетельством этому как раз и является различие формул для «продольной» и «поперечной» масс.

Тело, движущееся вдоль

Рассмотрим теперь тело, движущееся вдоль оси x со скоростью v, сила действует также в направлении оси x:

$f_y = 0,\ f_z = 0$

Для данного случая 4-сила:

$$f^i = \left(\frac{vf_x}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{f_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, 0, 0 \right).$$

Найдем новые компоненты 4-силы, а затем и силы – в новой ИСО.

Компонента 4-силы, соответствующая оси x, преобразуется по Лоренцу:

$$f'^1 = \frac{f^1 - f^0 V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{f_x - vVf_x/c^2}{c\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{f_x(1-vV/c^2)}{c\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Мы уже знаем из предыдущих выкладок, что:

$$\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-V^2/c^2} = \sqrt{1-v^2/c^2-V^2/c^2+v^2V^2/c^4}.$$

С другой стороны, для f'^1 можно записать, как обычно, из (1):

$f'^1 \frac{f'_x}{c\sqrt{1-v'^2/c^2}}$. Здесь v' это скорость тела в новой ИСО. По правилу релятивистского преобразования скоростей:

$$v' = \frac{v-V}{1-vV/c^2}.$$

Несложные преобразования приводят к:

$$\boxed{f'_x = f_x}.$$

Итак, сила, направленная строго по оси x, при переходе в другую ИСО сохраняется. Никаких новых компонент также не появляется: f_y и f_z были равны нулю, при преобразовании они остаются нулевыми.

Для не дружащих с 4-векторами

Убедимся, что сила, направленная точно вдоль оси x, сохраняется при переходе в другую ИСО – без использования 4-векторов, но с применением дифференцирования.

Рассмотрим ИСО, в которой тело изначально покоилось: $v = 0$. Для этого тела запишем, в соответствии с обычной механикой:

$$fdt = mdv \qquad (4)$$

Перейдем теперь в другую ИСО, движущуюся относительно первой со скоростью V (соответственно, тело будет иметь в ней скорость $-V$). В этой ИСО (беря справа релятивистское выражение для импульса):

$$f'dt' = d\left(\frac{mv'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}\right) \qquad (5)$$

Величины со штрихами – в новой ИСО.

Вычисляя производную, и учитывая $v' = -V$, получаем:

$$f'dt' = \frac{mdv'}{(1-V^2/c^2)^{3/2}} \qquad (5')$$

Чтобы перейти от dv' к dv, применяем формулу преобразования скоростей для случая, когда скорости направлены одинаково:

$$v' = \frac{v-V}{1-vV/c^2}.$$

Дифференцируем, и, с подстановкой $v = 0$, получаем:

$$\left.\frac{dv'}{dv}\right|_{v=0} = (1 - V^2 / c^2),$$

$$dv' = (1 - V^2 / c^2) dv.$$

Чтобы перейти от dt' к dt, аналогично дифференцируем формулу преобразования Лоренца:

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}.$$

Теперь подставляем в (5') выражения для dv' и dt'. Легко получается:

$$f' dt = m dv.$$

Сравнивая с (4), убеждаемся, что:

$$\boxed{f' = f}.$$