

Преобразования координат в электродинамике

Рассуждения о специальной теории относительности не обходятся без упоминания ковариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца (и нековариантности относительно преобразований Галилея). Хотя не все представляют себе конкретно, в чем там дело.

В современных учебниках ковариантность уравнений электродинамики легко доказывается на основе 4-мерного формализма. Быть может, кого-то это не убеждает, или вообще остается непонятым. Здесь я покажу, каким путем рассуждали основоположники СТО.

Предполагаю, что формулы **преобразований Лоренца** известны:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Для краткости использовано общепринятое обозначение: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Ради простоты разберем ситуацию, когда отсутствуют заряды и токи: $\rho = 0$, $j = 0$. Даже и в этом случае выкладки будут громоздкими, я попытаюсь провести их предельно подробно. Как принято в теоретической физике, будем использовать гауссову систему.

Запишем известное **уравнение электродинамики**:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot} \mathbf{H}.$$

Используя определение ротора, для электрического поля по оси x получаем:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}. \quad (1)$$

Задача – выразить это уравнение через «штрихованные» координаты, то есть перейти к движущейся со скоростью v инерциальной системе отсчета (ИСО). Для этого сделаем некоторые подготовительные выкладки.

Сначала преобразуем $\frac{\partial E_x}{\partial t}$. Согласно известным правилам обращения с частными производными:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t}.$$

Из формул преобразований Лоренца путем дифференцирования получаем:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma v.$$

Очевидно также, что:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} = \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{\partial H_y}{\partial z}.$$

Теперь уравнение (1) приобретает вид:

$$\frac{\gamma}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} + \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\gamma v}{c}. \quad (1')$$

Оставим его до поры в покое, и запишем второе **уравнение электродинамики**:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

(напоминаю: для пустого пространства).

Через проекции вектора это будет выглядеть так:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Перейдем к «штрихованным» координатам. Займемся членом $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ (а с остальными все тривиально). Итак:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}.$$

Снова обращаемся к формулам Лоренца:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{\gamma v}{c^2}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \gamma \frac{\partial E_x}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\gamma v}{c^2}.$$

Осталось подставить это в (2), и заодно учесть, что:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y'}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z'}. \quad \text{И получаем (переносим члены):}$$

$$\gamma \frac{\partial E_x}{\partial x'} = \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{\partial E_z}{\partial z'} \quad (2')$$

Умножим (2') на $\frac{v}{c}$ (вскоре будет ясно, для чего):

$$\frac{\gamma v}{c} \frac{\partial E_x}{\partial x'} = \frac{\gamma v^2}{c^3} \frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_z}{\partial z'}. \quad (2'')$$

А теперь вернемся к уравнению (1'), заметив, что в нем также фигурирует $\frac{\gamma v}{c} \frac{\partial E_x}{\partial x'}$.

Подставим туда из (2''):

$$\frac{\gamma}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} + \frac{\gamma v^2}{c^3} \frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_z}{\partial z'}.$$

Сделаем перегруппировку:

$$\frac{\gamma}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{\gamma v^2}{c^3} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_z}{\partial z'}.$$

Еще немного преобразований:

$$\frac{\gamma}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{v}{c} \frac{\partial E_z}{\partial z'}.$$

Осталось сообразить, что $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma^2}$, и приходим к окончательному уравнению:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'} \gamma \left(H_z - \frac{v}{c} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \gamma \left(H_y + \frac{v}{c} E_z \right). \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$E_x' = E_x, \quad H_z' = \gamma \left(H_z - \frac{v}{c} E_y \right), \quad H_y' = \gamma \left(H_y + \frac{v}{c} E_z \right). \quad (4)$$

Тогда (3) совпадет с (1) с точностью до штрихов, а (4) будут формулами пересчета полей в движущуюся систему координат. Их можно дополнить еще тройкой формул, получаемых аналогичным образом из уравнений для других осей (вывод опустим):

$$H_x' = H_x, \quad E_y' = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c} H_z \right), \quad E_z' = \gamma \left(E_z + \frac{v}{c} H_y \right).$$

Доказательство ковариантности завершено? Пока еще нет. Посмотрим, что получится, если вместо преобразований Лоренца применить **преобразования Галилея**:

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Аналогично предыдущему (но гораздо проще) можно получить:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t'} - v \frac{\partial E_x}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} - \frac{v}{c} \left(\frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \right),$$

Или, окончательно:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(H_z - \frac{v}{c} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left(H_y + \frac{v}{c} E_z \right).$$

Достаточно ввести обозначения:

$$E_x' = E_x, \quad H_z' = H_z - \frac{v}{c} E_y, \quad H_y' = H_y + \frac{v}{c} E_z$$

— и мы опять пришли к уравнению (1). Только здесь преобразования полей несколько другие – без множителя Лоренца. Собственно говоря, формулы преобразования можно было получить, пренебрегая $\frac{v^2}{c^2}$.

Дополним их остальными формулами, вывести которые столь же просто:

$$H_x' = H_x, \quad E_y' = E_y - \frac{v}{c} H_z, \quad E_z' = E_z + \frac{v}{c} H_y.$$

А теперь, используя эти преобразования, попробуем вернуться назад к исходной ИСО, произведя обратное преобразование, к примеру, для H_z (надо будет вместо v брать $-v$).

$$H_z'' = H_z' + \frac{v}{c} E_y' = H_z - \frac{v}{c} E_y + \frac{v}{c} \left(E_y - \frac{v}{c} H_z \right) = H_z \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Произведя последовательно прямое и обратное преобразование, мы должны были получить снова H_z . Но не получили! Итак, преобразования Галилея в электродинамике некорректны.

Попробуем то же, но с формулами, выведенными из преобразования Лоренца:

$$H_z'' = \gamma \left(H_z' + \frac{v}{c} E_y' \right) = \gamma \left[\gamma \left(H_z - \frac{v}{c} E_y \right) + \frac{\gamma v}{c} \left(E_y - \frac{v}{c} H_z \right) \right] = \gamma^2 H_z \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = H_z.$$

Преобразования обращаются, как и должно быть. Вот теперь доказательство завершено.

Литература

1. А. Эйнштейн. К электродинамике движущихся тел
2. Х. А. Лоренц. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света